Un risultato importante, che noi non dimostreremo, è che la somma di questa serie quel numero e che avevamo già incontrato in precedenza come limite:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}=\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e.$$

Questo fatto serve fra l'altro a calcolare con una certa efficacia il numero e, dato che i termini della serie esponenziale decrescono con estrema rapidità. □

Attenzione! Si potrebbe pensare di applicare il criterio della radice per esaminare il comportamento della serie geometrica $\sum a^n$ con $a>0$. Infatti risulta

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^n}=\lim_{n\to\infty}a=a,$$

e per il criterio della radice la serie geometrica converge per $0<a<1$ e diverge per $a>1$.

A prescindere dal fatto che in questo modo non si ottengono tutti i casi, il ragionamento nasconde un circolo vizioso. Infatti per dimostrare il criterio della radice (e del rapporto) ci siamo serviti della conoscenza del comportamento della serie geometrica; non possiamo dunque applicare questi teoremi allo studio di quella serie. □

Esercizi

6.14. Sia $\sum a_n$ una serie a termini positivi, e convergente. Ricordando che $a_n\to 0$, si dimostri che la serie $\sum a_n^2$ converge. È vero il viceversa?

6.15. Dire se convergono le serie seguenti:

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+n}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^4}$
3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^4}{2^n}$
4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}$
5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n+3^n}$
6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+\ln n}$
7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\operatorname{sen}\frac{1}{n+1}$
8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^2}$
9. $\sum_{n=0}^{\infty}\operatorname{tg}\left(\frac{n}{1+n^3}\right)$
10. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{n!}$
11. $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{n^2}\right)$
12. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(n!)^2}$
13. $\sum_{n=1}^{\infty}[\operatorname{sen}(\operatorname{sen} n)]^n$
14. $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(\frac{n^2}{n^2+1}\right)$
15. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{n}$
16. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{\sqrt[4]{n^5+1}}$
17. $\sum_{n=1}^{\infty}n\operatorname{sen}2^{-n}$
18. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(\ln(n+1))^n}$
19. $\sum_{n=1}^{\infty}(n^2+1)\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{n}\right)^n$
20. $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{sen}\frac{\pi}{2n}$
21. $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})$
22. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}-n}{\sqrt{n}}$
23. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n^3\,2^n}$
24. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n^2+1}\right)^n$
25. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{3^n}\operatorname{sen}^n\left(\frac{\pi}{3}+\frac{1}{n}\right)$
26. $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{n}{n+3}}$
27. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{n^3\,n!}$
28. $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{tg}\frac{\pi}{4n^2}$

6.7. Serie a termini di segno variabile

I risultati che abbiamo dimostrato nella sezione precedente richiedono tutti che le serie in questione siano a termini positivi (o almeno lo siano da un certo punto in poi); essi cessano di valere se viene meno questa ipotesi.

Nel caso delle serie a termini di segno qualunque, ben poco si può dire in generale; l'unico risultato di un certo rilievo è il seguente

Teorema 6.7 (dell'assoluta convergenza) *Sia $\sum a_k$ una serie qualsiasi, e supponiamo che la serie $\sum |a_k|$ dei valori assoluti sia convergente. Allora converge anche la serie $\sum a_k$ di partenza, e si ha*

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty}a_k\right|\leq\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|.$$

Dimostrazione Consideriamo due nuove successioni b_k e c_k così definite:

$$b_k=\begin{cases}a_k & \text{se } a_k\geq 0\\ 0 & \text{se } a_k<0\end{cases}$$

$$c_k=\begin{cases}0 & \text{se } a_k\geq 0\\ -a_k & \text{se } a_k<0.\end{cases}$$

Le successioni b_k e c_k sono ambedue positive; si ha inoltre

$$b_k-c_k=\left.\begin{cases}a_k-0 & \text{se } a_k\geq 0\\ 0-(-a_k) & \text{se } a_k<0\end{cases}\right\}=a_k$$